КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. АЛЬ-ФАРАБИ
Физико-технический факультет
Кафедра Электроники и астрофизики

Алимгазинова Н.Ш.

Теоретические основы электротехники

для студентов, обучающихся по специальности
«Промышленная электроника и системы управления»

Алматы, 2025

3 лекция. Цепи синусоидального тока

Цель лекции. Изучить основные понятия и определения, связанные с синусоидальными электрическими величинами; научиться использовать комплексные числа и векторное представление при анализе электрических цепей синусоидального тока; освоить применение законов Ома и Кирхгофа в комплексной форме.

План

1. Синусоидальный ток. Основные характеристики
2. Способы представления синусоидальной величины
3. Законы Ома и Кирхгофа в комплексном виде

1. Синусоидальный ток. Основные характеристики

Изменяющиеся с течением времени величины называются ***переменными величинами.***

Режим работы ЭЦ, при котором переменные величины: напряжения и токи всех ветвей ЭЦ являются периодическими функциями времени или сохраняют неизменные значения, называется ***установившимся****, в противном случае* - ***неустановившийся режим работы цепи.***

Функция, изменяющаяся во времени по синусоидальному закону называется ***синусоидальной***. Любую периодическую синусоидальную функцию можно описать тремя характеристиками: *мгновенным, средним и действующим значениями.*

Значения функции в любой текущий момент времени называются ***мгновенными,*** которые определяется тремя величинами: *амплитудой* (максимальным значением функции), *угловой частотой* (числом полных колебаний за один цикл) и *начальной фазой* (величиной сдвига синусоиды относительно начала координат).

Мгновенное значение синусоидального тока равно:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i), \qquad (1)$$

где I_m - амплитуда, $\omega = 2\pi f$ - циклическая частота (рад/с), f – частота (1/с). Частота связана с *периодом – временем, за которое происходит одно полное колебание* (с), соотношением $f = 1/T$. Аргумент синуса, т.е. $(\omega t + \psi_i)$, называют полной фазой, ψ_i - начальная фаза. *Фаза характеризует состояние колебания (числовое значение) в данный момент времени.*

Мгновенные значения величин и их параметры по отдельности не позволяют судить о работе, совершаемой источниками электрической энергии или о мощности, рассеиваемой или преобразуемой в её элементах. Они не дают представления об энергетических параметрах цепи. Для этого требуются величины, включающие в оценку параметр - время. В цепях постоянного тока введение таких величин не требовалось, т.к. ЭДС, напряжения и токи были постоянными во времени.

При совместном рассмотрении нескольких синусоидальных величин (*e, u, i*) исследуют разность их фазных углов. Угол сдвига фаз – это разность начальных фаз двух синусоидальных величин - тока и напряжения на участке цепи. Он определяется вычитанием начальной фазы тока из начальной фазы напряжения $\varphi = \psi_u - \psi_i$. Угол φ – величина *алгебраическая*, в зависимости от того, опережает одна синусоидальная величина другую по фазе или отстает от нее, она может быть как положительная, так и отрицательная.

Средним *значением синусоидальной величины считают ее среднее значение за положительный полупериод, совпадающее со средним значением по модулю.*

$$I_{cp} = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} i(t)dt = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} I_m \sin(\omega t)dt = \frac{2I_m}{\pi}, \qquad (2)$$

т.е. среднее значение синусоидального тока от амплитудного составляет $2/\pi = 0.638$.

Действующее *значение синусоидального тока численно равно значению такого постоянного тока, который за время, равное периоду синусоидального тока, выделяет такое же количество теплоты или совершает тот же электродинамический эффект, что и постоянный ток:*

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m^2 \sin^2(\omega t)dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0.707 \cdot I_m, \qquad (3)$$

т.е. действующее значение синусоидального тока от амплитудного составляет 0,707.

Понятие действующего значения очень широко используется в цепях переменного тока. Большинство измерительных приборов градуируются в действующих значениях. Технические данные электротехнических устройств указываются в действующих значениях. В записи для действующих значений по соглашению используют прописные буквы без индекса, подчёркивая тем самым сходство этих понятий с аналогами на постоянном токе.

2. Способы представления синусоидальной величины

Известно несколько способов представления синусоидальной величины:

- ✓ тригонометрические функции;
- ✓ временные диаграммы;
- ✓ вращающиеся вектора;
- ✓ комплексные числа.

В первом случае синусоидальную величину можно записать через мгновенные значения: $a = A_m \sin(\omega t + \psi_a)$. Однако даже для простых цепей уравнения, описывающие электромагнитное состояние цепи, будут иметь сложный вид, из которых часто бывает невозможно определить интересующий нас параметр в общем виде. Поэтому при анализе цепей переменного тока эти функции представляют в виде временных диаграмм (рисунок 1).

По временным диаграммам можно наглядно увидеть качественные изменения величины с течением времени. Однако ни один из вышеописанных способов не дает возможность наглядно получить представление о количественных и фазовых соотношениях основных величин. В этом случае используют вектора, позволяющие перейти от тригонометрических к алгебраическим выражениям и количественно оценить характеристики синусоидальной величины.

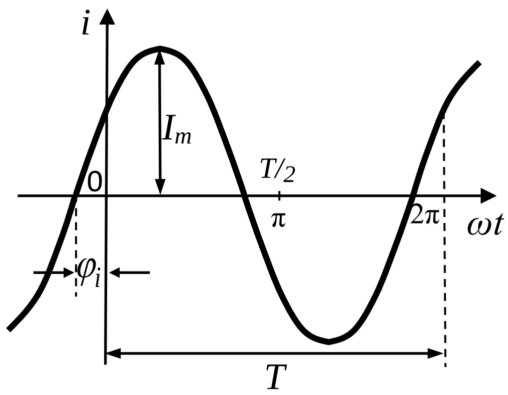
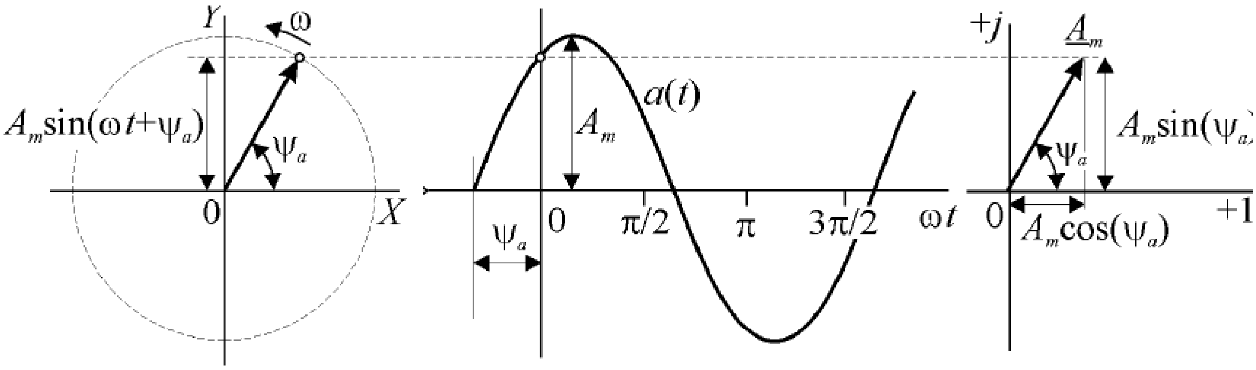


Рисунок 1 – Временная диаграмма тока

В третьем случае произвольная синусоидальная функция времени $a(t) = A_m \sin(\omega t + \psi_a)$ (рисунок 2, *б*) соответствует проекции на ось $0Y$ вектора с модулем равным A_m, вращающегося на плоскости $X0Y$ с постоянной угловой скоростью ω из начального положения, составляющего угол ψ_a с осью $0X$ (рисунок 2, *а*). Если таким же образом на плоскости изобразить несколько векторов, соответствующих разным синусоидальным функциям, имеющим одинаковую частоту, то они будут вращаться совместно, не меняя взаимного положения, которое определяется только начальной фазой этих функций. Поэтому при анализе цепей, в которых все функции имеют одинаковую частоту, ограничиваются только амплитудой и начальной фазой. В этом случае векторы, изображающие синусоидальные функции будут неподвижными (рисунок 2, *в*).

Совокупность *различных* синусоидально изменяющихся величин одинаковой частоты можно наглядно представить на одном графике с помощью применения вращающихся векторов. Так как суммирование и вычитание векторов гораздо проще, чем тригонометрических функций - метод очень распространен.

Рассмотрим четвертый случай. Геометрические операции с векторами можно заменить алгебраическими операциями с комплексными числами – это существенно повышает точность получаемых результатов.



а) б) в)

Рисунок 2 – Вращающиеся вектора

Любой вектор на плоскости можно представить совокупностью двух координат: либо двумя проекциями на оси декартовой системы координат, либо в полярной системе координат в виде модуля (длины) и угла с осью принятой за начало отсчёта (аргумента). Обе координаты в обоих случаях можно объединить в форме комплексного числа или, можно построить вектор, изображающий синусоидальную функцию на плоскости комплексных чисел.

Для записи комплексных чисел используют ***алгебраическую, тригонометрическую и показательные*** формы. Обычно комплексные величины обозначают «точкой» сверху или нижним подчеркиванием.

Алгебраическая форма записи. Любая точка на комплексной плоскости или вектор, проведённый из начала координат в эту точку, соответствуют комплексному числу

$$\dot{A} = p + jq, \tag{4}$$

где p – координата вектора по оси вещественных чисел, а q – по оси мнимых чисел.

Тригонометрическая форма записи. Представив вещественную и мнимую часть вектора через его длину и угол с осью вещественных чисел, получим:

$$\dot{A} = A_m \cos\psi_a + jA_m \sin\psi_a. \tag{5}$$

Показательная форма записи. Пользуясь формулой Эйлера $e^{j\psi_a} = \cos\psi_a + j\sin\psi_a$, можно перейти от тригонометрической к виду:

$$\dot{A} = A_m(\cos\psi_a + j\sin\psi_a) = A_m e^{j\psi_a}. \tag{6}$$

Здесь амплитуда синусоидальной функции является модулем комплексного числа, а начальная фаза аргументом.

Пр выполнении расчётов используются алгебраическая и показательная формы записи комплексных чисел: первая для выполнения операций суммирования, а вторая – для умножения, деления и возведения в степень. Переход от алгебраической формы к показательной форме:

$$A = \sqrt{p^2 + q^2}\ , \tag{7}$$

$$\psi_a = arctg\left(\frac{q}{p}\right). \tag{8}$$

Множитель вида $e^{j\psi} = \cos\psi + j\sin\psi$ называется *оператором поворота* и представляет собой единичный вектор, развёрнутый относительно вещественной оси на угол ψ. Название оператора связано с тем, что умножение на него любого вектора приводит к развороту последнего на угол ψ. Вещественные и мнимые числа 1, *j*, –1, –*j* можно рассматривать как операторы поворота

$$\begin{cases} 1 = e^{j0}; \\ j = e^{j\frac{\pi}{2}}; \\ -1 = e^{j\pi}; \\ -j = e^{-j\frac{\pi}{2}}. \end{cases} \tag{9}$$

Комплексное число $\dot{A}_m$, модуль которого равен амплитуде синусоидальной функции, называется *комплексной амплитудой*. Амплитуда и действующее значение функции связаны между собой константой $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$, поэтому расчёт можно вести сразу для действующих значений, если использовать комплексные числа с соответствующим модулем $\dot{A} = \frac{\dot{A}_m}{\sqrt{2}}$. Число $\dot{A}$ называется *комплексным действующим значением* или просто *комплексным значением*.

3. Законы Ома и Кирхгофа в комплексном виде

Закон Ома для различных участков цепи

а) Рассмотрим участок цепи, содержащий резистивный элемент с сопротивлением R, через который протекает синусоидальный ток

$$i_R = I_{mR}\sin(\omega t + \psi_{i_R}).$$

По закону Ома $i_R = \frac{u_R}{R}$, тогда падение напряжения на элементе будет

$$u_R = I_{mR} R \sin(\omega t + \psi_{i_R}).$$

Т.е. при синусоидальном токе напряжение на резистивном элементе изменяется тоже по синусоидальному закону. Сопоставим данное выражение с $u_R = U_{mR} \sin(\omega t + \psi_{u_R})$, тогда получим связь между амплитудными значениями

$$U_{mR} = I_{mR} R$$

и соотношение начальных фаз

$$\psi_{u_R} = \psi_{i_R}. \tag{10}$$

Из этого можно сделать *вывод, что на участке цепи, содержащем резистивный элемент, при протекании переменного тока****, сдвига фаз между током и напряжением не будет.***

Запишем ток и напряжение в комплексном виде:

$$\dot{U}_R = U_{mR} e^{j\psi_{u_R}},$$
$$\dot{I}_R = I_{mR} e^{j\psi_{i_R}},$$

тогда закон Ома для участка цепи:

$$\dot{U}_R = \dot{I}_R \cdot R. \tag{11}$$

Это выражение определяет ***падение напряжения на резистивном элементе***.

б) Рассмотрим участок цепи, содержащий емкостной элемент с емкостью C, применяемый как источник энергии, у которого напряжение изменяется по следующему закону

$$u_C = U_{mC} \sin(\omega t + \psi_{u_C}).$$

Ток, протекающий через емкостной элемент $i_C = \frac{dq}{dt}$, где $q = u_C C$. Тогда

$$i_C = U_{mC} \omega C \cos(\omega t + \psi_{u_C}).$$

Т.е. при синусоидальном напряжении на емкостном элементе ток также изменяется по синусоидальному закону. Если преобразуем выражение через функцию синуса, то получим

$$i_C = U_{mC}\omega C \sin(\omega t + \psi_{u_C} + \frac{\pi}{2})$$

Сопоставим данное выражение с $i_C = I_{mC} \sin(\omega t + \psi_{i_C})$, тогда получим соотношение начальных фаз

$$\psi_{i_C} = \psi_{u_C} + \frac{\pi}{2} \qquad (12)$$

и связь между амплитудными значениями

$$I_{mC} = U_{mC}\omega C \;,$$

где $X_C = \frac{1}{\omega C}$ - емкостное сопротивление.

Из этого можно сделать *вывод, что на участке цепи, содержащем емкостной элемент, при протекании переменного тока, между током и напряжением будет сдвиг фаз.* ***Напряжение на емкостном элементе отстает по фазе от тока на угол равный*** $\frac{\pi}{2}$**.**

Запишем все величины в комплексном виде:

$$\dot{U}_C = U_{mC} e^{j\psi_{u_C}} \;,$$

$$\dot{I}_C = I_{mC} e^{j\psi_{i_C}} \;,$$

$$\dot{X}_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C} = -jX_C \,, \qquad (13)$$

тогда закон Ома для участка цепи:

$$\dot{U}_C = \dot{I}_C \cdot \dot{X}_C = -jX_C \cdot \dot{I}_C \,. \qquad (14)$$

Это выражение определяет ***падение напряжения на емкостном элементе***.

в) Рассмотрим участок цепи, содержащий индуктивный элемент с индуктивностью L, через который протекает ток

$$i_L = I_{mL} \sin(\omega t + \psi_{i_L}) \,.$$

Напряжение на элементе равно

$$u_L = -e_L \,,$$

где $e_L = -L\frac{di_L}{dt}$ - ЭДС самоиндукции. Тогда

$$u_L = I_{mL}\omega L\cos(\omega t + \psi_{i_L}) .$$

Т.е. при синусоидальном напряжении на емкостном элементе напряжение также изменяется по синусоидальному закону. Если преобразуем выражение через функцию синуса, то получим

$$u_L = I_{mL}\omega L\sin(\omega t + \psi_{i_L} + \frac{\pi}{2})$$

Сопоставим данное выражение с $u_L = U_{mL}\sin(\omega t + \psi_{u_L})$, тогда получим соотношение начальных фаз

$$\psi_{u_L} = \psi_{i_L} + \frac{\pi}{2} \tag{15}$$

и связь между амплитудными значениями

$$U_{mL} = I_{mL}\omega L \ ,$$

где $X_L = \omega L$ - индуктивное сопротивление.

Из этого можно сделать *вывод, что на участке цепи, содержащем емкостной элемент, при протекании переменного тока, между током и напряжением будет сдвиг фаз.* ***Напряжение на емкостном элементе опережает по фазе ток на угол равный*** $\frac{\pi}{2}$**.**

Запишем все величины в комплексном виде:

$$\dot{U}_L = U_{mL}e^{j\psi_{uL}} ,$$

$$\dot{I}_L = I_{mL}e^{j\psi_{iL}} ,$$

$$\dot{X}_L = j\omega L = jX_L , \tag{16}$$

тогда закон Ома для участка цепи:

$$\dot{U}_L = \dot{I}_L \cdot \dot{X}_L = jX_L \cdot \dot{I}_L . \tag{17}$$

Это выражение определяет ***падение напряжения на емкостном элементе***.

Законы Кирхгофа

Смысл законов Кирхгофа не зависит от того как зависят от времени величины (ток, напряжение, ЭДС): постоянные или переменные. Различие состоит в том, что все переменные величины должны быть представлены в комплексном виде.

I закон Кирхгофа:

Алгебраическая сумма сходящихся в узле всех токов, представленных в комплексном виде, равна нулю:

$$\sum_k \dot{I}_k = 0 \tag{18}$$

II закон Кирхгофа:

Алгебраическая сумма падений напряжений на всех элементах замкнутого участка цепи (контура), представленных в комплексном виде, равна алгебраической сумме всех комплексных ЭДС данного участка цепи (контура):

$$\sum_k \dot{U}_k = \sum_m \dot{E}_m \tag{19}$$

Контрольные вопросы

1. Опишите основные характеристики синусоидального тока.
2. Опишите способы представления синусоидальной величины.
3. Сформулируйте закон Ома в комплексном виде для участка цепи, содержащей индуктивный элемент.
4. Сформулируйте закон Ома в комплексном виде для участка цепи, содержащей активное сопротивление.
5. Сформулируйте закон Ома в комплексном виде для участка цепи, содержащей емкостной элемент.
6. Сформулируйте законы Кирхгофа в комплексном виде.

Литература

1 Алимгазинова Н.Ш. Теория Электрических Цепей. Курс Лекций. – Алматы: Қазақ университеті, 2016. – 8,7 п.л..

2 Манаков С.М., Алимгазинова Н.Ш., Бурисова Д.Ж., Исимова А.Т. Основы электротехники в упражнениях и задачах. – Алматы: Қазақ университеті, 2016. –10 п.л..

3 Манаков С.М., Алимгазинова Н.Ш., Толегенова А.А. Учебно-Методическое Пособие По Курсу "Теория Электрических Цепей". – Алматы: Қазақ университеті, 2016. – 12 п.л.

4 Теоретические основы электротехники. Версия 1.0 [Электронный ресурс]: конспект лекций / С. Г. Иванова, В. В. Новиков. – Электрон. дан. (4 Мб). – Красноярск: ИПК СФУ, 2008.

5 Атабеков Г. И. Основы теории цепей : учебник / Г. И. Атабеков . – 2-е изд., испр . – СПб. : Лань, 2006 . – 432 с.

6 Прянишников В.А. Теоретические основы электротехники. М: КОРОНА-Век, 2012. - 368 с.

7 Атабеков Г.И. Нелинейные электрические цепи. Теоретические основы электротехники. Учебное пособие. СПб.: Питер, Лань, 2010. – 432 с.

8 Бессонов Л.А. Электрические цепи. Теоретические основы электротехники. М: Юрайт, 2016. – 701 с.

9 Попов В.П. Основы теории цепей: Учебник для студ. вузов спец. Радиотехника. – М.: Высшая школа, 2000. – 574 с.